Basisprüfung lineare Algebra - Sommer 2019

Michael Baumgartner

Im Folgenden handelt es sich um einen Lösungsvorschlag meinerseits und ich kann nicht für Korrektheit garantieren !

1) a) $\langle v_1, v_2 \rangle = 8 - 16 + 8 = 0$ ✓

$\langle v_1, v_3 \rangle = 4 + 28 - 32 = 0$ ✓

$\langle v_2, v_3 \rangle = 32 - 28 - 4 = 0$ ✓

b) Ist durch die in a) gezeigte Orthogonalität gegeben.

Rigoros: Für lin. unabh. muss Folgendes gelten:

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \overset{!}{\Longleftrightarrow} a = b = c = 0$$

$$\frac{\langle v_1, \cdot \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \Bigg| \quad \frac{a \langle v_1, v_1 \rangle + b \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{0} + c \underbrace{\langle v_1, v_3 \rangle}_{0}}{\langle v_1, v_1 \rangle} = a = 0$$

$$\frac{\langle v_2, \cdot \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \Bigg| \quad b = 0$$

$$\frac{\langle v_3, \cdot \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \Bigg| \quad c = 0 \qquad \square$$

c) Normieren die Spalten in R für Q:

$$A = Q \cdot R = \underbrace{\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & & \emptyset \\ & 9 & \\ \emptyset & & 9 \end{bmatrix}}_{R}$$

2) a)

EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \frac{1}{8} \det \begin{bmatrix} 1-2\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -2\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix}$

$$= (1-2\lambda) \det \begin{bmatrix} -2\lambda & -2 \\ -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ 1 \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= (1-2\lambda)(4\lambda^2 - 2\lambda - 4) + 2(4\lambda - \cancel{2} \cancel{+2}) + (2\lambda + 4)$$

$$= (1-2\lambda)(4\lambda^2 - 2\lambda - 4) + 10\lambda + 4$$

$$= -8\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4\lambda^2 - 2\lambda \cancel{-4} + 10\lambda \cancel{+4}$$

$$= -8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 16\lambda \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\lambda_1 = 0}$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \qquad \lambda_2 = \underline{2}, \ \lambda_3 = \underline{-1}$$

EV: $(A - \lambda I) x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -s \end{array}$

$$\Rightarrow E_0 = \underline{\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = 2$: $\left.\begin{matrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \left.\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = s \end{matrix}$

$$\Rightarrow E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_3 = -1$: $\left.\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \left.\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = s \\ x_2 = 2s \\ x_1 = s \end{matrix}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & & \emptyset \\ & 2 & \\ \emptyset & & -1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\dot{y} = Ay = TDT^{-1}y = TDz \quad | \; Tz = y$

$T^{-1}\dot{y} = Dz$

$\dot{z} = Dz \quad \Rightarrow \quad z = e^{D} z_0$

$\Rightarrow \quad y = Tz = Te^{D} z_0$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & e^{2t} & \\ \emptyset & & e^{-1t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \end{bmatrix}$$

$$= z_{01}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z_{02}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z_{03}e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T z_0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow z_{03} = \underline{\frac{1}{2}}, \quad z_{02} = \underline{0}, \quad z_{01} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

3)

a) V: $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{25} \Rightarrow \lambda_1 = \underline{25}$

$\sigma_1 = \underline{5}$

$$\Rightarrow \Sigma = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

b) EV: $(A - \lambda I) x \overset{!}{=} 0$

$$0 \mid 0 \Rightarrow x_1 = s \Rightarrow E_{25} = \text{span}\underline{\{[1]\}}$$

$$\Rightarrow V = \underline{\underline{[1]}}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} [1]}{5} = \underline{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ Bekommen nur 1 Wert, dass sind immernoch unendlich viele mögliche ONB, müssen über AA^T gehen:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ wir wissen $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ EV:

$\lambda_2 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_2 &= t \\ x_1 &= -\frac{4}{3} t \end{aligned}$

$$\Rightarrow E_0 = \text{span}\left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

⚠ Das wäre auch gerade die offensichtlichste Lösung beim Raten gewesen, es ist aber wichtig zu sehen, dass dies nicht so sein musste! Ich denke Raten hätte nicht die volle Punktzahl gegeben!

$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 25 \end{bmatrix}$ wäre ebenfalls orthogonal zu $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$!

c) Wissen
$$A x = b$$
$$U \Sigma V^T x = b$$
$$\Sigma V^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\Sigma} V^T x = d_0$$
$$x = V \hat{\Sigma}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 55 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \}\, d_1 \end{matrix}$$

$$\hat{\Sigma} = 5, \quad \hat{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{5}[1][11] = \frac{11}{5}$$

Matlab überprüft

4)

a) Zuerst einmal ist $\mathcal{A}$ wohldefiniert, da:

$$\mathcal{A}(1) = 1 \in \mathcal{U}_3 \;,\; \mathcal{A}(t) = t \in \mathcal{U}_3 \;,\; \mathcal{A}(t^2) = t^2 \in \mathcal{U}_3$$

Wir zeigen: $\forall a, b \in G_3 \;,\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$

ii) $\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha \mathcal{A}(a)$

$\Rightarrow$ i) & ii):

$$\mathcal{A}(a+\alpha b) = a(0) + \alpha b(0) + t \left[a(t) + \alpha b(t)\right]' \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left[a(t) + \alpha b(t)\right]'' \Big|_{t=0}$$

$$= a(0) + \alpha b(0) + t\left(a'(0) + \alpha b'(0)\right) + \frac{1}{2} t^2 \left(a''(0) + \alpha b''(0)\right)$$

$$= a(0) + t a'(0) + \frac{1}{2} t^2 a''(0) + \alpha \left(b(0) + t b'(0) + \frac{1}{2} t^2 b''(0)\right)$$

$$= \mathcal{A}(a) + \alpha \mathcal{A}(b) \qquad \square$$

b)

$$1 \xrightarrow{\mathcal{A}} 1 = \underline{1} \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$t \longrightarrow t = 0 \cdot 1 + \underline{1} \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$t^2 \longrightarrow t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \underline{1} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

c) Wir zeigen, dass wir die alten Basen als Linearkombination dieser neuen Basen schreiben können:

G_3:

$$1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

$t = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$

$t^2 = p_3 - \frac{1}{2}(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = p_3 - p_1$

$\mathcal{U}_3$:

$1 = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)$

$t = q_1$

$t^2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_3)$

Somit sind die neuen Basen ebenfalls Erzeugendensysteme von $\mathcal{G}_3$ & $\mathcal{U}_3$ respektive. Da es jeweils nur 3 Vektoren sind, sind diese minimal & somit eine Basis. $\square$

d)

$1 + t \xrightarrow{A} 1 + t = \frac{1}{2}(q_2 + q_3) + q_1$

$1 - t \longrightarrow 1 - t = \frac{1}{2}(q_2 + q_3) - q_1$

$1 + t + t^2 \longrightarrow 1 + t + t^2 = \frac{1}{2}(q_2 + q_3) + q_1 + \frac{1}{2}(q_2 - q_3)$

$$\Rightarrow B = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}}$$

⚠ Transponieren nicht vergessen!

5) Wir beweisen beide Richtungen der Äquivalenz:

$\Rightarrow$: $AB = AC \quad | A^H$

$A^H AB = A^H AC \qquad \square$

$\Leftarrow$: ⚠ A muss nicht vollen Rang haben $\Rightarrow A^H$ nicht sicher invertierbar!

V1: $A^H AB = A^H AC$

$A^H (AB - AC) = 0 = A^H A (B - C)$

$\leadsto$ Entweder $B - C \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow \underline{\underline{AB - AC = 0}}$

<u>oder</u> $AB - AC \in \mathrm{Ker}(A^H)$ aber das ist nur möglich für $\underline{\underline{AB - AC = 0}}$, da $\mathrm{Im}(A)$ orthogonal auf $\mathrm{Ker}(A^H)$ nach dem Fundamentalsatz der linearen Algebra!

V2: Könnte man auch mit einem Beweis per Widerspruch machen, fast schöner:

Annahme: $AB \neq AC \Leftrightarrow AB - AC \neq 0$

$\Rightarrow A^H (AB - AC) = 0 \Rightarrow AB - AC \overset{!}{\in} \mathrm{Ker}(A^H)$

aber $AB - AC \in \mathrm{Im}(A) \perp \mathrm{Ker}(A^H)$

$\Leftrightarrow AB - AC \notin \mathrm{Ker}(A^H)$ ↯

nach dem Fundamentalsatz der lin. Algebra

$\Rightarrow AB = AC \qquad \square$

6)

a) Man kann erkennen, dass es sich um Gram-Schmidt handelt. Dies eignet sich jedoch nur zur QR-Zerlegung, was nicht der Diagonalisierung entspricht! $\rightsquigarrow$ falsch

(Ausserdem wird keine Einschränkung an die Dimension von A gegeben, dann ist der Algo schlichtweg falsch für $m \neq n$)

b) richtig

c) falsch Rang kann immernoch $< m$ sein!

d) falsch Inversion von symm. Mat. immernoch symm. Jedoch die Multiplikation nicht unbedingt!

$$(A^{-1}B)^T = B^T A^{-T} = BA^{-1} \neq A^{-1}B$$

nur falls A^{-1} mit B kommutiert

e) falsch Einfaches Gegenbeispiel:

$$A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 + A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(I_2 + A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I_2 - A^{-1} = I_2 - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f) falsch Man Betrachte A mit $\det(A) = 0$:)

(Falls $\det(A) \neq 0$ stimmt die Aussage, vlt. ist die Aufgabe auch sehr unglücklich gestellt, da A^{-1} explizit noch vorkommt. Ich denke die Aufgabe ist diskussionswürdig?)